VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Facultat de Física

Treball de Fi de Grau en Física

Simulación de oscilaciones de neutrinos con un ordenador cuántico

JULIO 2021

Alumne/a: Alberto Rodríguez-Moldes Sebastián

Tutor/a (1): Andreu Anglés Castillo
Tutor/a (2): Armando Pérez Cañellas

Resumen

La computación cuántica nos permite simular sistemas de partículas cuyo comportamiento y propiedades solo puedan ser explicadas con las leyes de la mecánica cuántica. Una de estas partículas son los neutrinos, partículas muy interesantes que pueden ser la clave para desvelar grandes misterios del universo. En este trabajo estudiaremos las oscilaciones de neutrinos, una propiedad característica de estas partículas cuyo descubrimiento da una información crucial sobre su naturaleza. Simularemos este fenómeno con un ordenador cuántico para demostrar el potencial de esta tecnología. Esto va más allá de una simulación clásica, pues estaremos creando un sistema totalmente cuántico con las mismas propiedades que un neutrino.

Quantum computation gives us the possibility to simulate particle systems which behaviour and properties are only explained by quantum mechanics. One of those particles are neutrinos, very interesting particles that can be the key to reveal the greatest mysteries of our universe. In this thesis we will study neutrino oscillations, one characteristic property of these particles which discovery provides us crucial insight about it's nature. We will simulate this phenomena with a quantum computer to show the potential of this technology. This goes way beyond a classical simulation, because we will be creating a quantum system with the same properties than that of neutrinos.

Contenidos

1. Introducción **3**

2. Introducción a la computación cuántica **3**
2.1. El qubit 3
2.2. El circuito cuántico 5
2.3. Puertas lógicas clásicas y cuánticas 5

3. Introducción a la información cuántica **8**
3.1. La matriz densidad 8
3.2. Entropía 9
3.3. Entrelazamiento 10
3.4. Entropía de entrelazamiento 10
3.5. Ejemplo: creación de un estado entrelazado con un circuito cuántico . 11
3.6. El error en los ordenadores cuánticos 12

4. Oscilaciones de neutrinos **12**
4.1. ¿Qué es un neutrino? 12
4.2. Introducción a las oscilaciones de neutrinos 13
4.3. Evolución temporal de los estados superpuestos 14
4.4. La masa de los neutrinos 15

5. Oscilaciones de neutrinos en un ordenador cuántico **16**
5.1. Representación en la base computacional para dos sabores: la base de número de ocupación 16
5.2. Mode-entanglement y entropía de una partícula 17
5.3. Representación en la base computacional para tres sabores 18

6. Simulación de oscilación de dos sabores **18**
6.1. Resultados teóricos 18
6.2. El circuito 19
6.3. Resultados experimentales 21
6.4. Evolución de la entropía de entrelazamiento 22
6.5. Concurrencia 23

7. Simulación de oscilación de tres sabores **24**
7.1. Resultados teóricos 24
7.2. La matriz PMNS en un circuito cuántico 25
7.3. Resultados experimentales 27

8. Conclusión **28**

Referencias **29**

1. Introducción

La computación cuántica y la información cuántica son unos marcos teóricos brillantes para el desarrollo de tareas computacionales y de tratamiento de información usando sistemas y leyes mecano-cuánticas[1]. El potencial de este método de computación está fuera de duda, pero las limitaciones tecnológicas hacen dudar, aún a día de hoy, de su posible uso en diferentes tareas. En este trabajo hablaremos primero de los fundamentos de esta tecnología, y cómo usarla a su favor. Veremos cómo se trabaja con información en un sistema cuántico y como crear estos sistemas.

Una de las tareas en las que los ordenadores cuánticos tienen un poder inigualable frente a los ordenadores clásicos es la de simular sistemas cuánticos, como puede ser el caso de la partícula con masa más ligera del modelo estándar hasta la fecha. En el siguiente capítulo hablaremos de esta partícula, el neutrino.

Los neutrinos son posiblemente las partículas más fascinantes del modelo estándar por su poder de transmitir información de un lugar a otro a grandes velocidades sin pérdidas. Esto es una ventaja a la vez que un inconveniente para los físicos de partículas, porque se debe a una interacción con la materia muy débil, al contrario que los cualquier otra partícula con o sin masa. Su descubrimiento fue tan revolucionario como lo fue más adelante el descubrimiento de sus oscilaciones, pues nos proporcionaba una herramienta para entenderlos y, con ello, una para adentrarnos en en centro de supernovas, estrellas, núcleos galácticos, y el propio Big Bang.[2]

Estas oscilaciones pueden ser simuladas en un ordenador cuántico, creando, a partir de elementos mucho más manejables que los neutrinos, sistemas cuánticos que se comporten como tales. De esto hablaremos en los últimos capítulos, haciendo una descripción detallada de cómo crear estos sistemas.

En este trabajo no haremos un análisis del error de los ordenadores que usemos ni de las propiedades técnicas de estos. Simplemente trataremos de hacer un análisis cualitativo demostrando que se pueden simular sistemas cuánticos reales de una forma sencilla en ordenadores cuánticos.

2. Introducción a la computación cuántica

2.1. El qubit

El qubit es la unidad fundamental de información cuántica. Es el análogo al bit de la computación clásica, y al igual que este también tiene dos valores posibles, el 0 y el 1. La diferencia entre ellos es que así como un bit siempre está en uno de estos estados determinados, el qubit puede estar en una superposición de ellos. Esta superposición es cuántica, y esto significa que a la hora de medir obtendremos o 0 o 1 con cierta probabilidad, y que la propia naturaleza del estado antes de medirlo es la indeterminación. Una vez realizamos dicha medida, decimos que el qubit 'colapsa'

a uno de los valores posibles.

Esto es representado habitualmente de dos formas análogas, en forma de función de onda y en forma de la llamada 'Esfera de Bloch'. La única condición que imponemos a estas representaciones es que estén normalizadas, lo cual es lógico, pues la probabilidad de medir 0 y la de medir 1 han de sumar 1, pues son las únicas dos posibilidades. Por esta razón la función de onda es de esta forma:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad ; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{1}$$

Donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los elementos de una base canónica de dimensión 2, es decir:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

En este caso la probabilidad de medir $|0\rangle$ es $|\alpha|^2$ y la de medir $|1\rangle$ es $|\beta|^2$.

La esfera de Bloch es una superficie esférica unidad como la Figura 1.

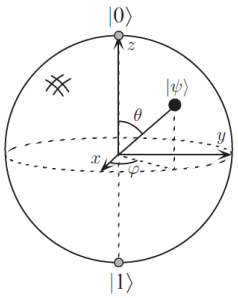


Figura 1: Esfera de Bloch [1]

El estado en la forma de (1) se representa en las coordenadas esféricas de la esfera de Bloch como:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \tag{3}$$

Para trabajar con varios qubits la notación es similar. Así como para uno solo tenemos dos elementos que forman la base, para n qubits tendremos 2^n. Para denotar estos estados, usaremos el producto tensorial. Para el caso de dos qubits:

$$|00\rangle = \underset{\text{qubit 1}}{|0\rangle} \otimes \underset{\text{qubit 0}}{|0\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Esta será la base computacional que se use en gran parte del trabajo. Aquí aprovechamos para aclarar la notación sobre varios qubits, donde vemos que se empiezan a contar por la derecha empezando por 0. Así, cuando nos refiramos al qubit 1 sabemos que es el segundo por la derecha y así sucesivamente.

En este trabajo vamos a tratar el qubit como un elemento matemático con las propiedades especificadas. Para hacernos una ligera idea de qué puede ser un qubit podemos pensar en cualquier sistema cuántico de dos niveles o polarizaciones. Por ejemplo un electrón con dos polarizaciones de espín en una misma dirección, un fotón con dos polarizaciones espaciales o incluso un átomo de dos niveles.

2.2. El circuito cuántico

El circuito cuántico es la forma más básica de representar operaciones sucesivas sobre un conjunto de qubits. En estos circuitos cada qubit sigue una línea, como si se tratara de un simple cable, y va pasando por diferentes elementos que alteran su estado. Estos elementos son las *puertas lógicas* que veremos a continuación. Los qubits parten de un estado inicial determinado $|0\rangle$ y siguen el circuito hasta que finalmente son medidos. La medida puede realizarse individualmente sobre cada qubit, es decir, no hace falta que se midan todos al mismo tiempo. Una vez realizada esta medida se guarda en un canal clásico.

La medida en estos circuitos se representa en la Figura 2, donde q_0 representa el canal cuántico por donde pasa el qubit y c_0 el canal clásico mencionado.

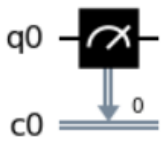


Figura 2

En este trabajo usaremos la plataforma Qiskit para programar nuestro circuito cuántico ya que, una vez terminado, es capaz de mandarlo directamente a un ordenador cuántico real de IBM, y así podemos obtener resultados experimentales sin necesidad de contar con un ordenador cuántico cerca.

2.3. Puertas lógicas clásicas y cuánticas

Claramente la información contenida en un solo qubit es mucho mayor que en la de un bit. Aunque esta información no la podamos extraer directamente podemos usar a nuestro favor la indeterminación, alterando las probabilidades de que, al medirlo, obtengamos 0 o 1. Estos elementos que modifican las probabilidades se llaman puertas lógicas.

En la computación clásica las puertas lógicas se encargan de hacer las operaciones básicas con bits. Entre estas operaciones está la negación de un bit o la suma, resta y producto de varios, entre otras. A partir de estas operaciones simples es como los ordenadores realizan todas las operaciones lógicas y con ellas se puede construir cualquier algoritmo.

Para los ordenadores cuánticos estas puertas tienen el mismo efecto, pero dado que podemos construir superposiciones hay muchas posibles puertas más. Son representadas por matrices, que actúan sobre el estado inicial. Así como antes la única condición que tenía que cumplir el qubit era la normalización, ahora la única que ha de cumplir la puerta lógica cuántica es que sea unitaria, es decir, que $U^\dagger U = I$. De esta forma el estado final también estará normalizado. Esta condición también es necesaria para que las puertas sean reversibles, es decir, que para toda puerta U exista otra, $U^\dagger$, que te devuelva al estado inicial. Esta propiedad no la tienen todas las puertas lógicas clásicas, donde se puede perder la información del estado inicial

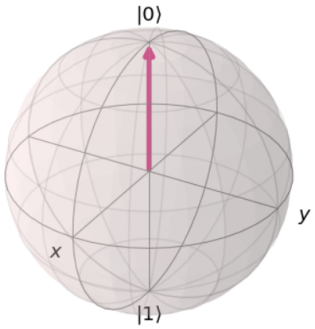
al realizar operaciones. Por esta razón, puertas clásicas como la puerta AND, que suma dos bits, no están permitidas en un circuito cuántico.

En el caso básico de la negación de un bit y un qubit como (3):

$$Bit: \qquad 0 \xrightarrow{NOT} 1 \quad , \quad 1 \xrightarrow{NOT} 0$$

$$Qubit: \qquad |\psi\rangle_i \xrightarrow{NOT} |\psi\rangle_f = \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle \tag{6}$$

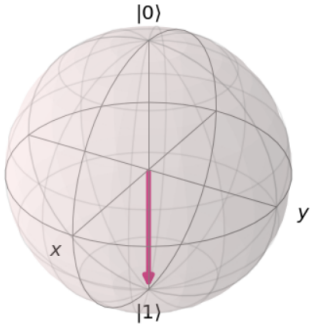
Podemos escribir la puerta NOT de forma matricial: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. También se le suele llamar puerta X, por ser equivalente a la matriz de Pauli σ_x.



Estado inicial $|0\rangle$ representado en la esfera de Bloch



Representación de la puerta lógica X en un circuito cuántico



Estado final $|1\rangle$, al hacer pasar $|0\rangle$ por la puerta X

El ejemplo básico de matriz que no tiene análogo clásico es la puerta Hadamard, que actuando sobre un estado inicial te devuelve un estado totalmente superpuesto, es decir, que tenga un 50 % de probabilidades de ser 0 y otro 50 % de ser 1:

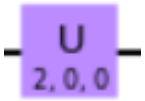
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{7}$$



Puerta Hadamard en un circuito

Así como habíamos expresado la forma general para una función de onda en (3) ahora podemos expresar de forma general una matriz unitaria U_3. Tanto la puerta Hadamard como la puerta X son casos especiales de esta:

$$U_3(\theta, \lambda, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i\lambda+i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{8}$$



Puerta que representa la matriz unitaria U genérica

También existen puertas lógicas que actúen sobre dos qubits. Las más comunes son las puertas controladas. Estas puertas actúan sobre un qubit como una puerta

U_3 si otro qubit, llamado 'de control' es $|1\rangle$, y no hacen nada si este es $|0\rangle$. Un caso particular sencillo es una que, al actuar sobre un qubit, le aplique una puerta X (NOT). A esta puerta se le llama CNOT. En en caso de ser el primer qubit por la izquierda, el 1, el de control:

Control(q_1)	Target(q_0)		Control(q_1)	Target(q_0)
0	0		0	0
0	1		0	1
1	0		1	1
1	1		1	0

$$C_{NOT_{10}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 6: Tabla de verdad: estado inicial de dos qubits a la izquierda y estado final a la derecha. Además, representación matricial de esta puerta

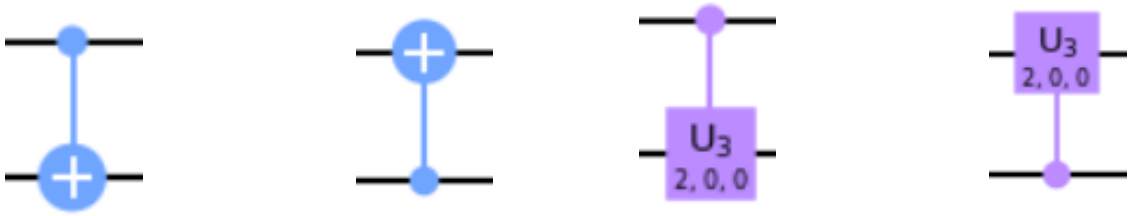
Para una puerta controlada genérica que tenga como qubit de control el qubit 1 (el segundo por la derecha):

$$C_{U_{10}}(\theta, \lambda, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\phi+\lambda)} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i(\phi-\lambda)} \sin\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & e^{i(\phi-\lambda)} \sin\frac{\theta}{2} & e^{i(\phi+\lambda)} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Si el qubit de control es el qubit 0 (el primero por la derecha):

$$C_{U_{01}}(\theta, \lambda, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\phi+\lambda)} \cos\frac{\theta}{2} & 0 & -e^{-i(\phi-\lambda)} \sin\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{i(\phi-\lambda)} \sin\frac{\theta}{2} & 0 & e^{i(\phi+\lambda)} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

En un circuito cuántico estas puertas se representan de la siguiente forma:



Puerta $CNOT_{01}$ con el qubit 0 de control

Puerta $CNOT_{10}$ con el qubit 1 de control

Puerta $C_{U_{01}}$ con el qubit 0 de control

Puerta $C_{U_{10}}$ con el qubit 1 de control

Esto resume todas las puertas lógicas que vamos a usar en este trabajo. Más adelante veremos la aplicación de esto sobre circuitos.

3. Introducción a la información cuántica

3.1. La matriz densidad

Otra forma más allá de la base computacional de describir tanto un conjunto de qubits como un sistema cuántico general es la matriz densidad. Nos permite describir correctamente estados de los que solo podemos decir que se encuentra en un estado $|\psi_i\rangle$ con una probabilidad p_i, que resulta en una descripción más general que la descrita hasta ahora para definirlos:

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \tag{11}$$

Como ejemplo, tomemos un estado superpuesto de dos qubits, A:

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle) = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{12}$$

Sabiendo que el sistema se encuentra en un estado determinado la matriz densidad será en este caso, simplemente:

$$\rho_A = |\psi_A\rangle \langle\psi_A| = |1\rangle \langle 1| \otimes \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|) = \rho_{A1} \otimes \rho_{A0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Donde hemos podido separar las matrices en sus componentes de cada uno de sus qubits (ρ_{A1}, ρ_{A0}).

Cuando no podemos separar el estado de dos qubits de forma tan clara como en (13) existe un método para separar su matriz densidad y referirnos a la matriz de un solo qubit. Por ejemplo, con el estado B:

$$|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \tag{14}$$

En este caso es imposible expresarlo en forma de producto.

La matriz densidad será, de forma similar al caso anterior:

$$\rho_B = |\psi_B\rangle \langle\psi_B| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Si quisiéramos hablar de la matriz densidad de uno de los qubits tendríamos que hacer la llamada 'traza parcial' de este qubit. Recordamos que la traza es la suma

sobre los elementos de la diagonal de una matriz. Matemáticamente es bastante intuitivo y se ve mejor con un ejemplo. Descomponiendo (15) en la suma de sus elementos:

$$\rho_B = \frac{1}{2}(|10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 01|) \tag{16}$$

Podemos a su vez descomponer cada bracket en su producto tensorial de cada qubit por separado:

$$\rho_B = \frac{1}{2}\{|1\rangle\langle 1|_1 \otimes |0\rangle\langle 0|_0 + |0\rangle\langle 1|_1 \otimes |1\rangle\langle 0|_0 + |1\rangle\langle 0|_1 \otimes |0\rangle\langle 1|_0 + |0\rangle\langle 0|_1 \otimes |1\rangle\langle 1|_0\} \tag{17}$$

Si ahora queremos hacer la traza parcial sobre el qubit 0 sumamos los elementos de la diagonal del qubit de la derecha, estos son $|1\rangle\langle 1|_0$ y $|0\rangle\langle 0|_0$, y eliminamos el resto:

$$Tr_0\{\rho_B\} = \frac{1}{2}\{|1\rangle\langle 1|_1 + |0\rangle\langle 0|_1\} = \rho_{B1} \tag{18}$$

Si hubiéramos hecho esto mismo sobre el sistema A, es decir,si hubiéramos hecho la traza parcial sobre el qubit 0 en A, habríamos obtenido la ρ_{A1} y si la hubiéramos hecho sobre el qubit 1, ρ_{A0}.

3.2. Entropía

Clásicamente la entropía de un sistema mide la cantidad de grados de libertad (o microestados accesibles, en términos estadísticos) de este. También se dice que mide el grado de desorden de un sistema. En la teoría de la información se usa el mismo término de entropía para medir la aleatoriedad de un sistema, o su incertidumbre. Estos dos conceptos están relacionados intuitivamente, dado que a mayor grados de libertad es más difícil predecir el estado final del sistema.

En información cuántica parece un poco más complicado definir la entropía. En termodinámica solemos hablar de la entropía de muchas partículas, cómo se transfiere calor de un sistema a otro, o cómo varía la entropía si aumentamos al temperatura o disminuimos el volumen de un gas. ¿Pero qué sucede si en lugar de un conjunto de partículas tuviéramos dos partículas en un sistema cuántico superpuesto?

La entropía de un sistema cuántico sigue la descripción de la teoría de la información, con la llamada 'Entropía de Shannon'.

Matemáticamente la entropía de una distribución de probabilidades, p_n, es la 'Entropía de Shannon'[1]:

$$S = -\sum_x p_x \log p_x \tag{19}$$

Donde las probabilidades en este caso son clásicas. Von Neumann usó una forma análoga a la entropía de Shannon para describir la entropía de un sistema cuántico, usando el formalismo de la matriz densidad:

$$S = -Tr\{\rho \ln \rho\} \tag{20}$$

3.3. Entrelazamiento

Más allá de la computación cuántica uno de los elementos de la mecánica cuántica que vamos a estudiar es el de entrelazamiento. Mantendremos la notación de los qubits.

Matemáticamente se puede describir de una forma simple. Decimos que un conjunto de qubits están entrelazados si su función de onda no es separable, esto es, si no puede expresarse como el producto de dos funciones de onda individuales para cada qubit($|\psi\rangle \neq |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_0$). Esto ya lo habíamos visto describiendo la matriz densidad. El estado (14) es un ejemplo de estado entrelazado, no separable:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \tag{21}$$

Este estado tiene una peculiaridad muy interesante. Si mides uno solo de los qubits inmediatamente conoces el resultado de la medida sobre el otro. Es decir, si mides el qubit 0 y observas el estado $|1\rangle$ sabes que el otro qubit tiene que ser $|0\rangle$ y lo mismo al revés, y independientemente de la medida que tomes de uno de ellos siempre conocerás el valor del otro. A este fenómeno se le llama entrelazamiento y a este tipo de estados de dos qubits en el que si mides uno sabes el otro se les llama estados de Bell o pares EPR.

Pero esto va más allá de una simple correlación entre magnitudes, algo que no tiene por qué ser cuántico. En este caso recordamos que cuando se realiza una medida del sistema el estado colapsa a uno de los estados clásicos. La naturaleza del estado superpuesto es su propia indeterminación, por ello cuando medimos y colapsa, cambiamos a su vez la propia naturaleza. Esto no sucede clásicamente, donde la medida simplemente es una forma de extraer información y no afecta de ninguna forma a lo que se está midiendo. [3]

En el entrelazamiento radica gran parte del poder de la computación cuántica y es un elemento clave en la mecánica cuántica y en la física de partículas.

3.4. Entropía de entrelazamiento

Podemos hacer una distinción dentro de este concepto de entrelazamiento que nos llevará a conclusiones interesantes. Este es que un estado pueda estar más o menos entrelazado. Por ejemplo, puedes medir un qubit y que con este tengas, como en el caso de los pares EPR, toda la información sobre otro, o sobre todos en el sistema, o puede ser que al medirlo tengas solo parte de la información de alguno de ellos.

Ahora que sabemos que entrelazamiento significa extraer información de un elemento del sistema midiendo otro, está más clara la conexión con la entropía. La forma de medir esta información es la 'Entropía de entrelazamiento'. Así como podíamos decir antes que la entropía medía la incertidumbre o aleatoriedad la entropía de entrelazamiento ahora medirá la cantidad de información de este sistema una vez

midamos uno de sus elementos. Esto está directamente relacionado con la aleatoriedad, ya que si un sistema está totalmente entrelazado (par EPR), al medir un qubit perdemos la aleatoriedad del otro, al haber extraido su información.

Cuanto más entrelazado esté un estado cuántico, mayor será su entropía.[4]

Análogamente a la entropía de Von Neumann y usando la traza parcial ρ_i de la matriz densidad ρ, la entropía de entrelazamiento se define como:

$$S_{ent} = -Tr\{\rho_i \log_{\dim \mathcal{H}} \rho_i\} \tag{22}$$

La base del logaritmo es la dimensión del *espacio de Hilbert*, que en este caso simplemente será equivalente al número de qubits del sistema. En el caso de un sistema de dos qubits, la entropía de entrelazamiento da el mismo resultado si usamos la traza parcial de la matriz densidad de cualquiera de los dos.[5]

3.5. Ejemplo: creación de un estado entrelazado con un circuito cuántico

Vamos a ver cómo podríamos crear un sistema entrelazado como (14) a partir de un circuito cuántico con puertas lógicas.

Primero creamos un sistema con dos estados posibles equiprobables. Un ejemplo de ello es uno con dos qubits, el qubit 1 en $|1\rangle$ y el 0 en un estado superpuesto $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. En un mismo circuito, estos dos qubits se representan como:

$$|1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle) \tag{23}$$

Vamos a crear este estado. En un circuito partimos de dos qubits en $|0\rangle$, es decir, que aprtimos de $|00\rangle$. Para que el qubit 1 pase de $|0\rangle$ a $|1\rangle$ solo tenemos que negarlo, así que le aplicamos una puerta X(NOT). Al qubit 0, por otro lado, tendríamos que aplicarle una puerta Hadamard (H)(7) y obtendríamos el estado deseado. De esta forma:

$$X\,|0\rangle \otimes H\,|0\rangle = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle) \tag{24}$$

Estos dos qubits representan ahora un estado separable, no entrelazado.

Ahora para llegar a (14) podemos aplicar una última puerta. Si queremos entrelazarlos tendremos que usar una que actúe sobre los dos qubits. En este caso nos basta con una simple CNOT, en la que el qubit 0 sea el qubit de control, es decir, que si el qubit 0 es $|1\rangle$ negará el qubit 1:

$$CNOT_{01}\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \tag{25}$$

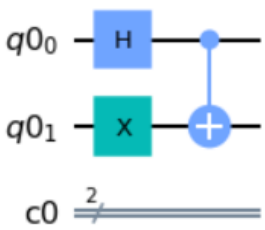


Figura 8: Circuito para crear un estado entrelazado de dos qubits

En la Figura 8 vemos representado el circuito cuántico que hemos usado para crear este estado.

3.6. El error en los ordenadores cuánticos

Hasta ahora solo hemos tenido en cuenta estados ideales, en lo que llamamos un 'sistema cerrado'. Esto quiere decir que no interactúa con el entrono, de forma que si pudiéramos realizar infinitas medidas sobre cualquier estado como $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ obtendríamos los valores de α y β con total precisión. Esto no es lo que sucede en realidad en ningún experimento, ya que siempre existe un efecto incontrolable del entorno sobre lo que queramos medir. Pero así como en un péndulo los efectos del entorno pueden ser despreciables, no es así en sistemas cuánticos, como por ejemplo los qubits.

Los sistemas que tienen en cuenta este efecto del entorno se llaman 'sistemas abiertos'[6]. Al efecto incontrolable que tiene el entorno sobre estos sistemas se le llama ruido.

En un circuito cuántico cuantas más operaciones se realice sobre los qubits, es decir, cuantas más puertas lógicas tenga un circuito, mayor será el ruido. Consideremos un sistema de dos qubits como el que hemos construido en la sección anterior $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$. Si quisiéramos hacerlo pasar por un circuito real, que corresponde a un sistema abierto, podríamos medir los estados $|00\rangle$ y $|11\rangle$ que ni siquiera aparecen en el estado que intentábamos preparar.

4. Oscilaciones de neutrinos

4.1. ¿Qué es un neutrino?

Los neutrinos son las partículas con masa más ligeras descubiertas hasta la fecha. De hecho inicialmente se consideraban partículas sin masa, como el fotón. La siguiente partícula más ligera, el electrón, pesa en concreto unos seis ordenes de magnitud más que los neutrinos [7]. Una consecuencia de esto es que sean tan difíciles de detectar, al interactuar débilmente con la materia. Ha sido posible detectarlas porque obtenemos grandes cantidades de ellos allá donde miremos.

El neutrino fue propuesto por primera vez para explicar la conservación del momento y la energía en desintegraciones beta:

$$n^0 \longrightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}_e \tag{26}$$

Por supuesto esta partícula debía ser de carga neutra, lo cual la hacía desde el principio difícil de detectar. Se detectó por primera vez en laboratorio en 1956, con el experimento de Cowan-Reines [8], en el que se usó un método de decaimiento beta

inverso. En este experimento se hacía interactuar un protón, que sin interaccionar con nada sería estable, con un antineutrino para dar un positrón y un neutrón:

$$p^+ + \overline{\nu}_e \longrightarrow e^+ + n^0 \tag{27}$$

A este neutrino se le llamó electrónico porque venía de la desintegración β, aunque en este momento se pensaba que era el único existente. Poco a poco se fue teorizando sobre la naturaleza de esta nueva partícula, llegando a la conclusión de que debían existir al menos tres tipos de neutrinos, dependiendo de la reacción de la que provenían. A esta propiedad se le llamó sabor, y sabemos que existen tres de ellos: electrónico ν_e, muónico ν_μ [9] y tauónico ν_τ[10]. Al igual que el electrónico, el sabor indica la reacción de la que proviene.

Sabiendo las reacciones de las que provienen y lo poco que interaccionan con la materia se puede estimar la cantidad y el sabor de los neutrinos de distintas fuentes. Sabemos que la mayor fuente de neutrinos en la Tierra son provenientes del Sol, pero existen también neutrinos atmosféricos y de origen geológico. $6,5\times10^{10}$ neutrinos por segundo por centímetro cuadrado nos llegan del Sol. Gracias a enormes detectores de neutrinos como el Kamiokande (ahora Super-Kamiokande) o el IceCube somos capaces de detectar algunos de todos estos neutrinos.

La detección de neutrinos fue especialmente importante en la detección de explosiones de supernovas, en las que los neutrinos, al no interaccionar con la materia a su alrededor llegaban antes a la Tierra que los propios fotones.

4.2. Introducción a las oscilaciones de neutrinos

Conociendo con detalle las reacciones nucleares que sucedían dentro del Sol y la frecuencia con la que suceden podíamos estimar la cantidad y el sabor de los neutrinos que nos llegarían a la Tierra, y con ello la cantidad de estos que seríamos capaces de detectar[11]. Los neutrinos que se producen en el Sol son electrónicos en su gran mayoría, específicamente en el decaimiento β^+ del ^8B en la llamada cadena ppIII:

$$^8B \longrightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_e \tag{28}$$

El problema de la oscilación de neutrinos llegó cuando tratamos de observar estos neutrinos del Sol, viendo que detectábamos al rededor de un tercio de los estimados[12]. La propuesta que finalmente fue demostrada fue la de que el neutrino tenía masa, al contrario de lo que se pensaba en aquel momento. Y no solo tenía masa sino que los estados de sabor del neutrino no coincidían con los de masa definida. Es decir, que si tratáramos de medir la masa de neutrinos de mismo sabor obtendríamos en algunos casos un valor distinto que otro, lo que es una superposición cuántica. Esta teoría ya fue predicha años atrás por Pontecorvo en 1967[13]. Siguiendo esta teoría los estados de sabor de neutrinos serían una superposición cuántica de estados de masa definida:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j U_{\alpha,j} |\nu_j\rangle \quad ; \quad \nu_\alpha = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \tag{29}$$

Donde la base $|\nu_i\rangle$ con $i = 1, 2, 3$ representa la base de masa definida, distinta a la base de sabor definido. Los parámetros que definen esta superposición, aquí denotados como $U_{\alpha,j}$ vienen recogidos en la llamada matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata)[14]:

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e,1} & U_{e,2} & U_{e,3} \\ U_{\mu,1} & U_{\mu,2} & U_{\mu,3} \\ U_{\tau,1} & U_{\tau,2} & U_{\tau,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} \tag{30}$$

Vemos que si desarrollamos cada término de este producto obtenemos (29). Por supuesto estos estados superpuestos están normalizados, de forma que $|U_{\alpha,1}|^2 + |U_{\alpha,3}|^2 + |U_{\alpha,3}|^2 = 1$.

Esta matriz conviene expresarla como el producto de tres matrices independientes parametrizadas por los llamados 'ángulos de mezcla':

$$\text{PMNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Donde c_{12} y s_{12} significa el coseno y seno del *ángulo de mezcla* θ_{12}, y el parámetro de fase δ_{CP} está relacionado con la violación de la simetría de carga-paridad (CP).

Esta representación simplificada separa la mezcla entre cada uno de los tres posibles estados de masa definida.

El detector Super-Kamiokande finalmente confirmó esta oscilación de neutrinos y Takaaki Kajita recibió el premio Nobel en 2015[15].

4.3. Evolución temporal de los estados superpuestos

Hemos visto que los estados de masa definida no coinciden con los de sabor definido y hemos presentado una forma de relacionarlos. Pero esto no ha resuelto el problema de la oscilación de neutrinos, porque aún tenemos que demostrar que a medida que los neutrinos avanzan en el tiempo este estado de sabor definido cambia. En mecánica cuántica sabemos que los estados $|E_i\rangle$ de energía definida E_i varían temporalmente solo una fase:

$$|E_i(t)\rangle = e^{-i\frac{E_i t}{\hbar}} |E_i(0)\rangle \tag{32}$$

Considerando que la base de energía definida es la base de masa definida podemos expresar, como en (29), la base de sabor definido en función de esta y entonces hacerla evolucionar según (32):

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_j U_{\alpha,j} e^{-i\frac{E_j t}{\hbar}} |\nu_j\rangle \tag{33}$$

Este estado representa la evolución de un neutrino de estado inicial $|\nu_\alpha\rangle$. La probablidad de medir un sabor determinado en un tiempo t viene dada por:

$$P_{\alpha\to\beta} = |\,\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle\,|^2 \tag{34}$$

Para calcular esto tendremos que relacionar la base de sabor en t con la base de sabor en $t = 0$. Como la matriz PMNS es unitaria podemos poner la base de masa definida en función de la de sabor en lugar de al revés, obteniendo:

$$|\nu_i\rangle = \sum_\beta U^*_{\beta,i}\,|\nu_\beta\rangle \tag{35}$$

Esta expresión es además más intuitiva, pues partimos de un estado inicial de sabor definido, como los neutrinos solares.

De esta forma podemos expresar finalmente el estado superpuesto evolucionado como:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{j,\beta} U_{\alpha,j}U^*_{\beta,j}e^{-i\frac{E_j t}{\hbar}}\,|\nu_\beta\rangle \tag{36}$$

Y calcular la probabilidad de transición de un estado de sabor definido a otro en función del tiempo:

$$P_{\alpha\to\beta}(t) = |\sum_j U_{\alpha,j}U^*_{\beta,j}e^{-i\frac{E_j t}{\hbar}}|^2 \tag{37}$$

Hemos expuesto teóricamente el problema de las oscilaciones de neutrinos. Vemos que al no ser la misma base la de masa definida y la de sabor definido, existe un cambio temporal en la probabilidad de medir un sabor u otro a tiempo t.

Usaremos en la mitad del trabajo una simplificación de la matriz PMNS, que se trata de considerar que solo tenemos dos sabores en lugar de tres. Al ser el sabor tauónico el que menos se mezcla con los otros dos, consideraremos únicamente los otros dos, el electrónico y el muónico. El formalismo es totalmente equivalente, pero ahora la matriz se reduce a una simple rotación:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12}\\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12}\end{pmatrix} \tag{38}$$

4.4. La masa de los neutrinos

Podemos analizar las energías E_j para ver qué relación guardan con las masas de cada uno de los neutrinos. De esta forma si conseguimos saber experimentalmente cómo son las oscilaciones, estaremos un paso más cerca de conocer la masa de los neutrinos, algo que a día de hoy no se conoce. Con la relación básica energía-momento relativista (con c=1):

$$E_j = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_j^2} \simeq p + \frac{m_j^2}{2p} \tag{39}$$

Donde hemos hecho la aproximación razonable de que $p = |\vec{p}| >> m_i$. Llamaremos E al momento p, por ser el término dominante y igual para todas las energías. Por último podemos aproximar que, si $c = 1$ y los neutrinos viajan a velocidades cercanas a las de la luz, al casi no tener masa, entonces $t \simeq L$, donde L es la distancia del detector a la fuente[16]. Sabiendo esto (con $\hbar = 1$):

$$P_{\alpha\to\beta} = |e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \sum_j U_{\alpha,j} U^*_{\beta,j} e^{-i\frac{m_j^2 L}{2E}}|^2 = |\sum_j U_{\alpha,j} U^*_{\beta,j} e^{-i\frac{m_j^2 L}{2E}}|^2 \tag{40}$$

		Normal Ordering (best fit)	
		bfp $\pm 1\sigma$	3σ range
without SK atmospheric data	$\sin^2\theta_{12}$	$0.304^{+0.013}_{-0.012}$	$0.269 \to 0.343$
	$\theta_{12}/^\circ$	$33.44^{+0.78}_{-0.75}$	$31.27 \to 35.86$
	$\sin^2\theta_{23}$	$0.570^{+0.018}_{-0.024}$	$0.407 \to 0.618$
	$\theta_{23}/^\circ$	$49.0^{+1.1}_{-1.4}$	$39.6 \to 51.8$
	$\sin^2\theta_{13}$	$0.02221^{+0.00068}_{-0.00062}$	$0.02034 \to 0.02430$
	$\theta_{13}/^\circ$	$8.57^{+0.13}_{-0.12}$	$8.20 \to 8.97$
	$\delta_{CP}/^\circ$	195^{+51}_{-25}	$107 \to 403$
	$\frac{\Delta m^2_{21}}{10^{-5}\ \mathrm{eV}^2}$	$7.42^{+0.21}_{-0.20}$	$6.82 \to 8.04$
	$\frac{\Delta m^2_{3\ell}}{10^{-3}\ \mathrm{eV}^2}$	$+2.514^{+0.028}_{-0.027}$	$+2.431 \to +2.598$

Figura 9: Datos de ángulos de mezcla y masas relativas[17]

Por tanto sabemos que midiendo experimentalmente las oscilaciones de neutrinos podemos obtener la diferencia entre cuadrados de las masas. La masa Δm^2_{12} fue hallada midiendo neutrinos solares y Δm_{23} midiendo neutrinos atmosféricos. Con estas medida y la de los ángulos de mezcla podemos hacer una descripción teórica bastante precisa de la oscilación de neutrinos.

5. Oscilaciones de neutrinos en un ordenador cuántico

5.1. Representación en la base computacional para dos sabores: la base de número de ocupación

Ahora trataremos de conectar estos dos conceptos que hemos introducido, la computación cuántica y las oscilaciones de neutrinos. Para ello necesitamos conectar el formalismo de la base de sabor definido con la base computacional.

En el caso de tener dos sabores, la descripción más simple de una base con dos componentes ortogonales es la de un solo qubit. En este caso el sabor electrónico correspondería a $|0\rangle$, por ejemplo, y el sabor muónico al $|1\rangle$. Otra posible descripción bastante intuitiva es la de dos qubits, en la que el qubit 0 te diga si el neutrino es electrónico, $|1\rangle$, o no $|0\rangle$ y el 1 haga lo mismo si es muónico. De esta forma $|\nu_e\rangle = |01\rangle$ y $|\nu_\mu\rangle = |10\rangle$ y el resto de componentes de la base $|00\rangle$ y $|11\rangle$ no tienen sentido al contar únicamente con un neutrino. A esta base se le llama base de número de ocupación, porque cuenta el número de neutrinos de cada sabor.

Esta es especialmente interesante porque nos permite, usando el formalismo de la matriz densidad, separarla en la parte de sabor electrónico y muónico y medir su entrelazamiento.

5.2. Mode-entanglement y entropía de una partícula

Antes hemos hablado de entrelazamiento y entropía, y está claro que dos qubits pueden estar entrelazados pero, si lo que estamos describiendo es un único neutrino, ¿cómo puede ser que esté entrelazado consigo mismo?¿Qué significado adquiere este entrelazamiento? Este es el llamado mode-entanglement, o entrelazamiento de modos. Se le llama así porque primeramente se describió para medir el entrelazamiento de dos modos de oscilación de un mismo fotón, especialmente confuso cuando uno de estos modos es el vacío.

Tiene sentido hablar de entrelazamiento de sabores de la misma forma que entrelazamiento entre partículas. Podemos decir que si medimos si un neutrino es de sabor electrónico (que es realmente lo que hacemos en los detectores) o no, mediremos inmediatamente si el neutrino es muónico o no (si no es electrónico es muónico y viceversa, en este caso ideal). Visto con la notación de la base computacional, sabemos que si tenemos un ($|1\rangle$) neutrino electrónico tenemos cero ($|0\rangle$) neutrinos muónicos y viceversa. Puede argumentarse que realmente esto no sea entrelazamiento, pues lo que tenemos es una misma partícula en dos estados superpuestos, no dos partículas distintas [18]. Con un ejemplo demostramos que de una forma sencilla podemos pasar a un formalismo de dos partículas separadas espacialmente[4]:

Realizamos un experimento de scattering para un mismo neutrino preparado en una superposición de estados. Suponemos un caso ideal en el que:

$$\nu_\alpha + n^0 \longrightarrow \alpha^- + p^+ \tag{41}$$

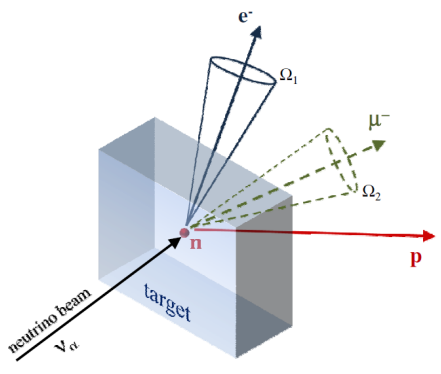


Figura 10: Representación del experimento. Una superposición de estados de sabor pasa a una separada espacialmente, en el que tiene sentido hablar de la base de número de partículas de cada tipo.[4]

En este caso $\alpha^- = e^-, \mu^-$. Al tener distinta masa, al aplicarle un campo magnético existirá una diferencia en la dirección de dispersión de la partícula α saliente dependiendo de si es un electrón o un muón. Ahora, como se ve en la Figura 10, hemos pasado de una superposición de estados de sabor a una superposición de estados separados espacialmente. Ahora sí que está clara la distinción entre tener un muón o un electrón, y tenemos dos partículas diferentes donde la existencia de una está condicionada por la de otra. Si hiciéramos dos medidas de, por ejemplo, 2 neutrinos que interaccionen con el medio (sin interaccionar entre ellos), sabemos que los posibles

acontecimientos son que midamos 2 electrones y cero muones, uno y uno, y 2 muones y cero electrones. Estos posibles acontecimientos están superpuestos cuánticamente, es decir, que es de naturaleza indeterminada hasta que se mide, y además si conocemos el número de partículas de uno sabemos el de otro. Esto es, claramente, entrelazamiento.[19]

Este experimento demuestra que, aunque podamos usar la base de un solo qubit para expresar la oscilación de neutrinos de dos sabores, la base de dos qubits nos da la herramienta para hallar el entrelazamiento de estos sabores. Esta será, por tanto, la que usemos en el circuito más adelante.

5.3. Representación en la base computacional para tres sabores

Análogamente al argumento dado para dos sabores podemos usar una base de tres qubits para representar tres estados. De esta forma podríamos hacer un cálculo del entrelazamiento en la misma base que usáramos para hallar los resultados. Esta sería:

$$|100\rangle = |\nu_e\rangle \qquad |010\rangle = |\nu_\mu\rangle \qquad |001\rangle = |\nu_\tau\rangle \tag{42}$$

Y esta seria una base totalmente correcta para describir el sistema. De todos modos, en el caso de tres sabores la descripción de entrelazamiento se hace más confusa y complicada, y por lo tanto lo dejaremos fuera de los objetivos de este trabajo. En este caso, existirían tres entropías de entrelazamiento[20], correspondientes a las tres posibles trazas parciales de la matriz densidad total, que te dirán el entrelazamiento de los otros dos sabores con el sabor sobre el que has hecho la traza. Ninguna de estas entropías es trivial, al contrario que en el caso de dos sabores, en el que solo tendríamos una entropía de entrelazamiento.

Por tanto usaremos la base que nos resulte más cómoda, que es la base de dos qubits, que no puede ser interpretada como base número sino simplemente como una base canónica ortonormal a la que le asignamos un significado a tres de ellas:

$$|10\rangle = |\nu_e\rangle \qquad |01\rangle = |\nu_\mu\rangle \qquad |11\rangle = |\nu_\tau\rangle \tag{43}$$

6. Simulación de oscilación de dos sabores

6.1. Resultados teóricos

En este apartado desarrollaremos teóricamente la ecuación (37) ya demostrada para el caso de contar únicamente de dos sabores, el electrónico y el muónico, y estado inicial electrónico. Como ya hemos comentado, la matriz PMNS en este caso se reduce a una rotación:

$$P_{e\to\beta}(t) = |\sum_{j=1,2} R_{e,j} R^{\dagger}_{\beta,j} e^{-i\frac{m_j^2 L}{2E}}|^2 \quad , \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} \end{pmatrix} \tag{44}$$

De esta forma hallaremos la probabilidad de que un estado inicialmente preparado en el sabor electrónico pase a sabor $\beta = e, \mu$:

$$P_{e\to\beta}(t) = |R_{e1}R^{\dagger}_{\beta 1}e^{-i\frac{m_1^2 L}{2E}} + R_{e2}R^{\dagger}_{\beta 2}e^{-i\frac{m_2^2 L}{2E}}|^2 =$$

$$= R^2_{e1}R^2_{\beta 1} + R^2_{e2}R^2_{\beta 2} + 2R_{e1}R_{e2}R^{\dagger}_{\beta 1}R^{\dagger}_{\beta 2}\cos\frac{\Delta m^2_{21}L}{2E} \tag{45}$$

Donde $\Delta m^2_{21} = m^2_2 - m^2_1$ es la diferencia del cuadrado de masas, que encontramos en la tabla de datos de la Figura 9. Ahora particularizando para sabor final muónico:

$$P_{e\to\mu}(t) = R^2_{e1}R^2_{\mu 1} + R^2_{e2}R^2_{\mu 2} + 2R_{e1}R^{\dagger}_{\mu 1}R_{e2}R^{\dagger}_{\mu 2}\cos\frac{\Delta m^2_{21}L}{2E}$$

$$= 2\cos^2\theta\sin^2\theta - 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cos\frac{\Delta m^2_{21}L}{2E}$$

$$= \cos^2\theta\sin^2\theta\cos\frac{\Delta m^2_{12}L}{4E} = \sin^2 2\theta\cos\frac{\Delta m^2_{21}L}{4E} \tag{46}$$

Para acortar la notación $\theta = \theta_{12}$, de forma que $\sin^2\theta = 0,304$.

La probabilidad de medir a un tiempo t el sabor electrónico:

$$P_{e\to e}(t) = R^4_{e1} + R^4_{e2} + 2R^2_{e1}R^2_{e2}\cos\frac{\Delta m^2_{21}L}{2E}$$

$$= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos\frac{\Delta m^2_{21}L}{2E} = 1 - P_{e\to\mu}(t) \tag{47}$$

Veremos representada en la Figura 13a estas probabilidades en función del parámetro $\psi = \frac{\Delta m^2_{21}L}{2E}$ libre:

$$\begin{cases} P_{e\to\mu}(\psi) = \sin^2 2\theta\cos\frac{\psi}{2} \\ P_{e\to e}(\psi) = 1 - P_{e\to\mu}(\psi) \end{cases}$$

Recalcamos que acabamos de demostrar que para que los neutrinos oscilen en sabor hace falta que estos tengan masa. Si $\Delta m^2_{12} = 0$ entonces no habrían oscilaciones.

Con un análisis similar podríamos obtener las probabilidades en el caso de estado inicial muónico.

6.2. El circuito

Pasamos ahora a crear un circuito cuántico que resuelva este mismo problema. La ventaja respecto del caso anterior es que de esta forma podemos hacer que un sistema de qubits, que son también partículas, se comporte, cada par individualmente, como un neutrino en lo que se refiere a su oscilación.

Para construir el circuito usaremos primero la base de un solo qubit para simplificar:

$$|\nu_e\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad |\nu_\mu\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{48}$$

Ahora miramos las operaciones que hemos hecho: primero hemos aplicado sobre un estado inicial electrónico $|\nu_e\rangle = |0\rangle$ una matriz unitaria para pasarlo a la base de masa definida. Luego hemos aplicado una fase sobre el estado resultante y de nuevo hemos aplicado la misma matriz unitaria, ahora traspuesta, para pasarlo de nuevo a la base de sabor:

$$|\nu_e(t)\rangle = R(\theta_{12}) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{m_1^2 L}{2E}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{m_2^2 L}{2E}} \end{pmatrix} R(\theta_{12})^\dagger \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= e^{-i\frac{m_1^2 L}{2E}} \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{U}_{ee} & \tilde{U}_{e\mu} \\ \tilde{U}_{e\mu} & \tilde{U}_{\mu\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{49}$$

La fase global la podemos ignorar, pues lo que vamos a obtener finalmente son probabilidades, independientes de estas fases globales. Con esta notación $P_{e\to e}(\psi) = |\tilde{U}_{ee}|^2$ y $P_{e\to\mu}(\psi) = |\tilde{U}_{e\mu}|^2$. Esto son simplemente tres puertas unitarias, casos especiales de la puerta U_3 de la ecuación (8):

$$R(\theta_{12}) = U_3(2\theta_{12}, 0, 0) \quad R(\theta_{12})^\dagger = U_3(-2\theta_{12}, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix} = U_3(0, 0, \psi) = U_1(\psi) \tag{50}$$

A esta última se le llama puerta U_1:



Figura 11: Circuito de un solo qubit

Ahora queremos pasar a la base de número de ocupación expliacada en la sección 5.1, representada por dos qubits[14]. Si añadimos un qubit más al circuito inicialmente está en el estado $|0\rangle$. Este será el nuevo qubit 0:

$$|\nu_e(t)\rangle = (\tilde{U}_{ee}\,|0\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|1\rangle) = \tilde{U}_{ee}\,|00\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|01\rangle \otimes |0\rangle \tag{51}$$

Para pasar a la base $|\nu_e\rangle = |01\rangle$ $|\nu_\mu\rangle = |10\rangle$ primero aplicamos una puerta X sobre el qubit 0, el nuevo. De esta forma tendríamos un estado inicial electrónico $|01\rangle$ antes de pasar por las demás puertas. Si quisiéramos analizar el sistema con estado inicial

muónico simplemente aplicaríamos una puerta X sobre el qubit 1 al principio. Luego añadimos una CNOT con el qubit 1 como qubit de control, que como sabemos, sirve para entrelazar nuestros qubits:

$$CNOT_{10}\{(\tilde{U}_{ee}\,|0\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|1\rangle)\} \otimes X\,|0\rangle = CNOT\{(\tilde{U}_{ee}\,|0\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|1\rangle) \otimes |1\rangle\} =$$

$$= CNOT_{10}\{\tilde{U}_{ee}\,|01\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|11\rangle\} = \tilde{U}_{ee}\,|01\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|10\rangle \tag{52}$$

Que es exactamente el resultado que buscábamos. Ahora realizaremos medidas sobre los dos qubits, así que añadiremos las puertas correspondientes a esta acción:

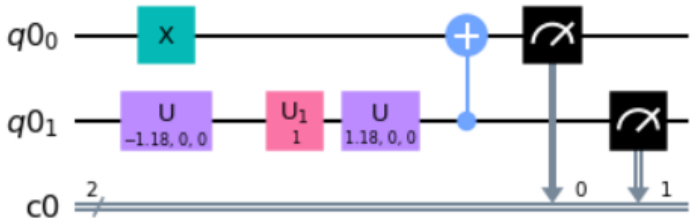
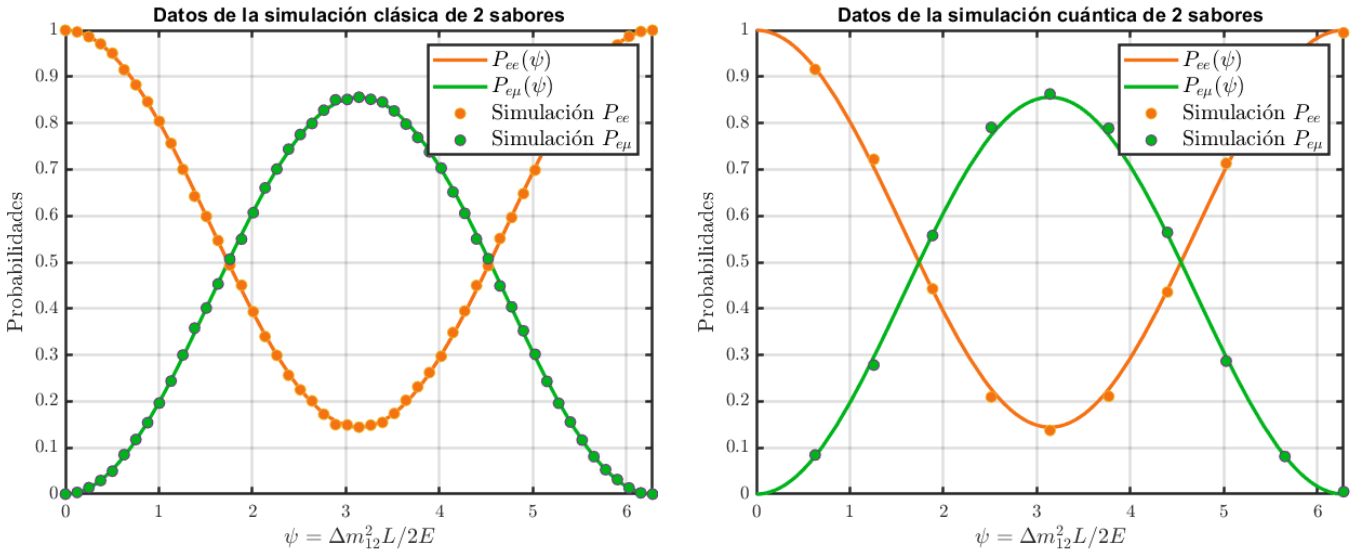


Figura 12: Circuito de dos qubits para representar un neutrino de dos sabores en la base de número de ocupación

6.3. Resultados experimentales

Representamos una simulación clásica del resultado de este circuito en la Figura 13a, para así comprobar que es correcto. Para ello hacemos la simulación sobre 50 circuitos que correspondan a 50 valores de ψ entre 0 y 2π.



(a) Representación de los datos de la simulación clásica de dos sabores, comparada con la expresión teórica

(b) Representación de los datos de la simulación cuántica, con 'ibmq_quito'.

Figura 13

Vemos que los puntos se ajustan casi a la perfección a los datos teóricos. No coinciden perfectamente porque la simulación clásica trata de simular estados superpuestos ideales, de forma que, al igual que los qubits, puedas medir al final un estado electrónico o muónico. De esta forma, según la cantidad de medidas que se hagan sobre estos estado iniciales, obtendremos con más y más precisión los valores teóricos de la superposición. En este caso hacemos 10^4 medidas de la simulación.

Ahora tomamos otros 10 datos enviando el circuito a un ordenador cuántico real público, representados en la Figura 13b. El ordenador usado en todas estas medidas ha sido 'imbq_quito', capaz de realizar operaciones sobre hasta 5 qubits al mismo tiempo

Los datos han sido tomados con 2048 medidas sobre qubits igualmente preparados, para cada punto. En este caso el error también es mínimo, debido a que tenemos únicamente dos qubits y muy pocas puertas lógicas.

6.4. Evolución de la entropía de entrelazamiento

La base de número de ocupación y su correspondiente representación como qubits nos permite hallar de forma más intuitiva el mode-entanglement de un neutrino de dos sabores, pues será igual al entrelazamiento entre los dos qubits que usemos.

Primero haremos el cálculo de la entropía de entrelazamiento (22) de este sistema de dos qubits y dos sabores. Para ello primero tenemos que construir la matriz densidad del estado final:

$$|\nu_e(t)\rangle = \tilde{U}_{ee}\,|01\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|10\rangle \tag{53}$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\tilde{U}_{ee}|^2 & \tilde{U}_{ee}\tilde{U}^*_{e\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{U}^*_{ee}\tilde{U}_{e\mu} & |\tilde{U}_{e\mu}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tag{54}$$

$$= |\tilde{U}_{ee}|^2\,|01\rangle\langle 01| + \tilde{U}_{ee}\tilde{U}^*_{e\mu}\,|01\rangle\langle 10| + \tilde{U}^*_{ee}\tilde{U}_{e\mu}\,|10\rangle\langle 01| + |\tilde{U}_{e\mu}|^2\,|10\rangle\langle 01| \tag{55}$$

Al igual que en el ejemplo de (16-19), haremos ahora la traza parcial de esta matriz sobre el qubit 0, es decir, sobre el sabor electrónico:

$$\rho_\mu = |\tilde{U}_{ee}|^2\,|1\rangle\langle 1|_\mu + |\tilde{U}_{e\mu}|^2\,|0\rangle\langle 0|_\mu = \begin{pmatrix} |\tilde{U}_{ee}|^2 & 0 \\ 0 & |\tilde{U}_{e\mu}|^2 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Podemos comprobar que en este caso habríamos obtenido el mismo resultado si hubiéramos hecho la traza parcial sobre el sabor muónico. Con este resultado, al ser una matriz diagonal, podemos hallar fácilmente el valor de la entropía de entrelazamiento, pues sabemos que la función de una matriz diagonal es una matriz con la función aplicada sobre sus elementos:

$$S_{ent} = Tr\{\rho_\mu \log_2 \rho_\mu\} = |\tilde{U}_{ee}|^2 \log_2 |\tilde{U}_{ee}|^2 + |\tilde{U}_{e\mu}|^2 \log_2 |\tilde{U}_{e\mu}|^2 \tag{57}$$

Donde:

$$P_{e\to e}(\psi) = |\tilde{U}_{ee}|^2 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos\psi \tag{58}$$

$$P_{e\to\mu}(\psi) = |\tilde{U}_{e\mu}|^2 = \sin^2 2\theta\cos^2\frac{\psi}{2} \tag{59}$$

Representamos en la Figura 14 la entropía de entrelazamiento hallada junto con las probabilidades de medir cada sabor.

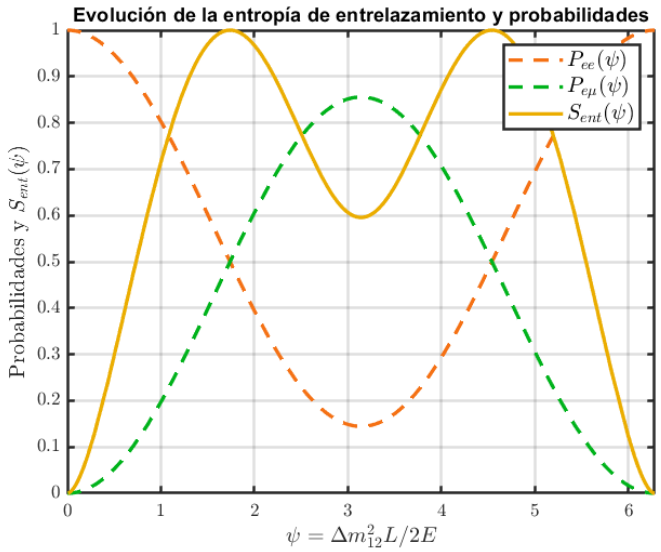


Figura 14: Representación de la entropía de entrelazamiento

Vemos que el máximo de la entropía coincide en el momento en el que las probabilidades de medir un sabor u otro son iguales, que es el caso de máximo entrelazamiento[1][4].

Ahora que ya hemos creado el circuito podemos empezar a ver la importancia de la base computacional y el uso de qubits para ver y calcular el entrelazamiento de este sistema. El entrelazamiento existente entre los qubits que usemos para representar el neutrino será el mode-entangement de este.

6.5. Concurrencia

La concurrencia es una medida del entrelazamiento entre otras, como por ejemplo la negatividad o el 'tangle'[21]. Proporciona una solución a la entropía de una forma más simple, ya que, para sistemas más complejos, esta puede ser difícil de resolver. Veremos que esta nos dará un resultado del entrelazamiento cualitativamente equivalente al de la entropía. Se define de la siguiente forma[3]:

$$C(\rho) = max\{0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4\} \tag{60}$$

Donde λ_i son las raíces de los autovalores de:

$$R = \rho\tilde{\rho} \quad ; \quad \tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

Donde ρ^* es la matriz densidad con cada elemento conjugado.

Esta $\tilde{\rho}$ se le llama 'matriz densidad de espín intercambiado'.[19] Se le llama así porque nos dice lo que le sucede al estado si intercambiamos el qubit 0 y el 1. Cuando no cambia el estado bajo este intercambio la concurrencia será máxima. Podemos

predecir, por tanto, que en el caso en el que las probabilidades de medir cada sabor sean iguales la concurrencia será 1, máxima, al igual que sucedía con la entropía.

$$\rho = (\tilde{U}_{ee}\,|01\rangle + \tilde{U}_{e\mu}\,|10\rangle)(\tilde{U}^*_{ee}\,\langle 01| + \tilde{U}^*_{e\mu}\,\langle 10|) \tag{62}$$

$$\rho^* = (\tilde{U}^*_{ee}\,|01\rangle + \tilde{U}^*_{e\mu}\,|10\rangle)(\tilde{U}_{ee}\,\langle 01| + \tilde{U}_{e\mu}\,\langle 10|) \tag{63}$$

Aplicando ahora las matrices σ_y:

$$\begin{aligned} (\sigma_y \otimes \sigma_y)\,|10\rangle &= |01\rangle \qquad (\sigma_y \otimes \sigma_y)\,|01\rangle = |10\rangle \\ \langle 10|\,(\sigma_y \otimes \sigma_y) &= \langle 01| \qquad \langle 01|\,(\sigma_y \otimes \sigma_y) = \langle 10| \end{aligned} \tag{64}$$

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\tilde{U}_{e\mu}|^2 & \tilde{U}^*_{e\mu}\tilde{U}_{ee} & 0 \\ 0 & \tilde{U}_{e\mu}\tilde{U}^*_{ee} & |\tilde{U}_{ee}|^2 & \end{pmatrix} \qquad R = \rho\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2|\tilde{U}_{ee}|^2|\tilde{U}_{e\mu}|^2 & 2\tilde{U}_{ee}\tilde{U}^*_{e\mu}|\tilde{U}_{ee}|^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde{U}^*_{ee}\tilde{U}_{e\mu}|\tilde{U}_{e\mu}|^2 & 2|\tilde{U}_{ee}|^2|\tilde{U}_{e\mu}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores $\alpha_i = \lambda_i^2$ de esta matriz son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$ y:

$$\alpha_4 = 4|\tilde{U}_{ee}|^2|\tilde{U}_{e\mu}|^2$$

$$\lambda_4 = 2|\tilde{U}_{ee}||\tilde{U}_{e\mu}| \quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 = 0 \tag{65}$$

La concurrencia será, por tanto:

$$C(\psi) = 2|\tilde{U}_{ee}||\tilde{U}_{e\mu}| = 2\sqrt{P_{e\to e}(\psi)P_{e\to\mu}(\psi)} \tag{66}$$

Hemos obtenido un resultado más simple que el de la entropía (57) y vemos en la Figura 15 que la forma de esta función es muy similar.

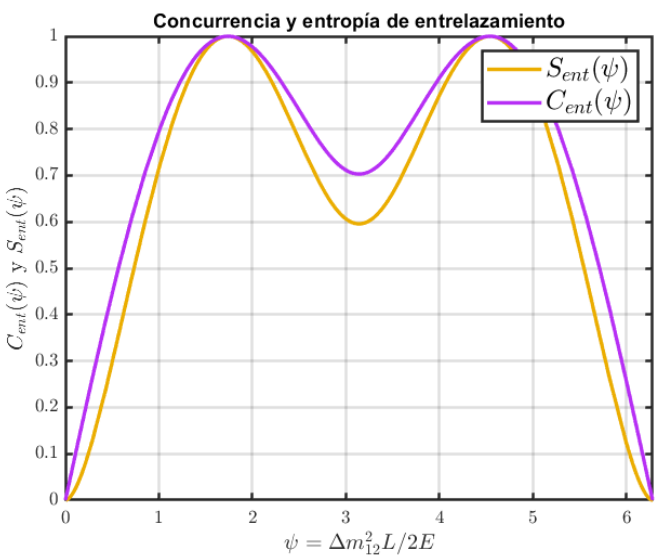


Figura 15: Representación de la concurrencia comparada con la entropía

7. Simulación de oscilación de tres sabores

7.1. Resultados teóricos

En este caso los resultados teóricos son mucho más largos, pues tenemos un desarrollo similar pero con matrices 3×3 en lugar de 2×2 como antes.

$$|\nu_e(t)\rangle = PMNS^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\frac{m_1^2 L}{2E}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{m_2^2 L}{2E}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{m_3^2 L}{2E}} \end{pmatrix} PMNS \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

$$P_{\alpha\to\beta} = |U_{\alpha 1}U_{\beta 1} + U_{\alpha_2}U_{\beta 2}e^{-i\frac{\Delta m^2_{21}L}{2E}} + U_{\alpha 3}U_{\beta 3}e^{-i\frac{\Delta m^2_{31}L}{2E}}|^2 \tag{68}$$

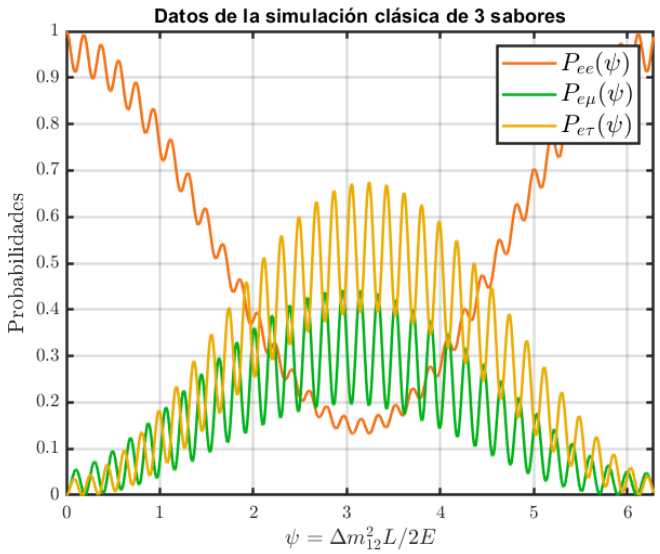


Figura 16: Oscilación de sabor de neutrinos

No escribiremos explícitamente las tres ecuaciones de las probabilidades. Todas siguen un desarrollo y simplificación análogos con los distintos elementos de matriz de (31). Sabiendo esto junto con los datos de la Figura 9 representamos en la Figura 16 la oscilación de sabor de los neutrinos.

7.2. La matriz PMNS en un circuito cuántico

Usaremos la base computacional de dos qubit para representar los tres sabores:

$$|10\rangle = |\nu_e\rangle \qquad |01\rangle = |\nu_\mu\rangle \qquad |11\rangle = |\nu_\tau\rangle \tag{69}$$

La única componente que no tiene ninguna interpretación en este problema es $|00\rangle$. Para poder usar la matriz PMNS, que es 3×3, en esta base de 4 componentes, en la que una de ellas carece de significado, podemos reescribir la matriz PMNS:

$$\text{PMNS}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & s_{12} & 0 \\ 0 & -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

Hemos extendido la matriz de forma que si se multiplica por cualquier elemento de la base de sabores, nunca tendremos términos con $|00\rangle$ en el estado final.

De esta forma al hacer el circuito podemos interpretar cada matriz como puertas lógicas controladas.

Claramente la segunda y tercera matriz por la derecha son puertas controladas de dos qubits con el qubit de control el 0 (11) y el 1 (10) respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} = C_{U_{01}}(-2\theta_{13}, \delta_{CP}, -\delta_{CP}) \tag{71}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} = C_{U_{10}}(-2\theta_{23}, 0, 0) \tag{72}$$

Por otro lado, la primera matriz no tiene directamente la forma de una puerta controlada. Harán falta tres puertas de este tipo para crearla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & s_{12} & 0 \\ 0 & -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = CNOT_{10}C_{U_{01}}(-2\theta_{12}, 0, 0)CNOT_{10} \tag{73}$$

De forma análoga podemos construir la matriz adjunta:

$$\begin{aligned} \text{PMNS}_4^\dagger = CNOT_{10}C_{U_{01}}(2\theta_{12}, 0, 0)CNOT_{10} \times C_{U_{01}}(2\theta_{13}, \delta_{CP}, -\delta_{CP}) \times \\ \times C_{U_{10}}(2\theta_{23}, 0, 0) \end{aligned} \tag{74}$$

Para terminar el circuito tenemos que crear la matriz de la evolución temporal, en la base computacional:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{m_1^2 L}{2E}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{m_2^2 L}{2E}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\frac{m_3^2 L}{2E}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{m_1^2 L}{2E}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{m_1^2 L}{2E}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\psi\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{21}^2}} \end{pmatrix} \tag{75}$$

Para ello compondremos dos matrices U_1 (50), aplicando cada una sobre uno de los qubits del circuito:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\psi_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\psi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\psi_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\psi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(\psi_1+\psi_0)} \end{pmatrix} = e^{i\psi_0} \begin{pmatrix} e^{-i\psi_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\psi_0-\psi_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\psi_1} \end{pmatrix} \tag{76}$$

Ahora podemos asociar las ψ_1 y ψ_2 a los términos de la matriz (75) anterior. Esto lo haremos sabiendo que tanto la fase global como el término $|00\rangle\langle 00|$ no afectará al resultado final si no coincide con la de (75):

$$\psi_1 = -\psi\frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{21}^2} \simeq -33,88\psi, \quad \psi_0 - \psi_1 = \psi \to \psi_0 = \psi(1 - \frac{\Delta m_{31}^2}{\Delta m_{21}^2}) \simeq -32{,}88\psi \tag{77}$$

Estos serán los parámetros que han de acompañar a las dos puertas U_1. Finalmente el circuito se construye aplicando primero sobre el estado inicial $|01\rangle$ electrónico la matriz $PMNS_4$ adjunta, luego las puertas de evolución temporal que acabamos de crear y por último la $PMNS_4$:

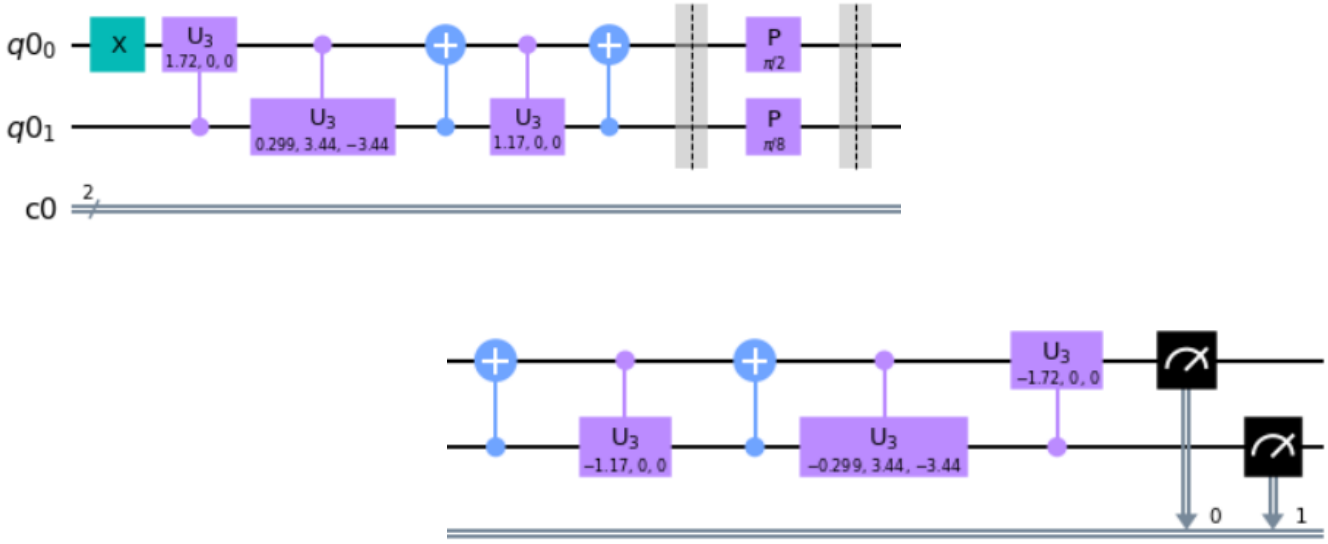


Figura 17: Circuito de dos qubits para representar un neutrino de tres sabores.

Existen otras formas de construir un circuito con el mismo resultado, pero esta parece la más simple y que ilustra mejor lo que queremos hacer. En [22] el circuito tiene un número de puertas lógicas menor, lo cual finalmente influirá en el error del ordenador cuántico, aunque el método utilizado es numérico y menos intuitivo.

7.3. Resultados experimentales

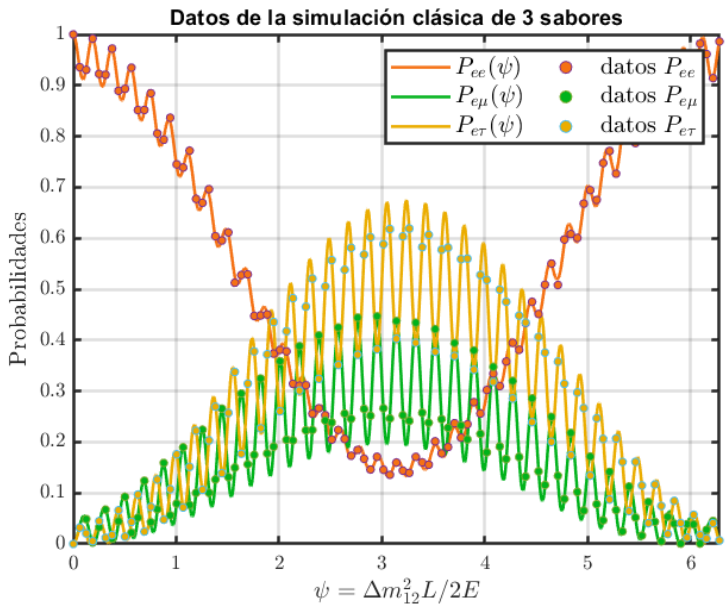
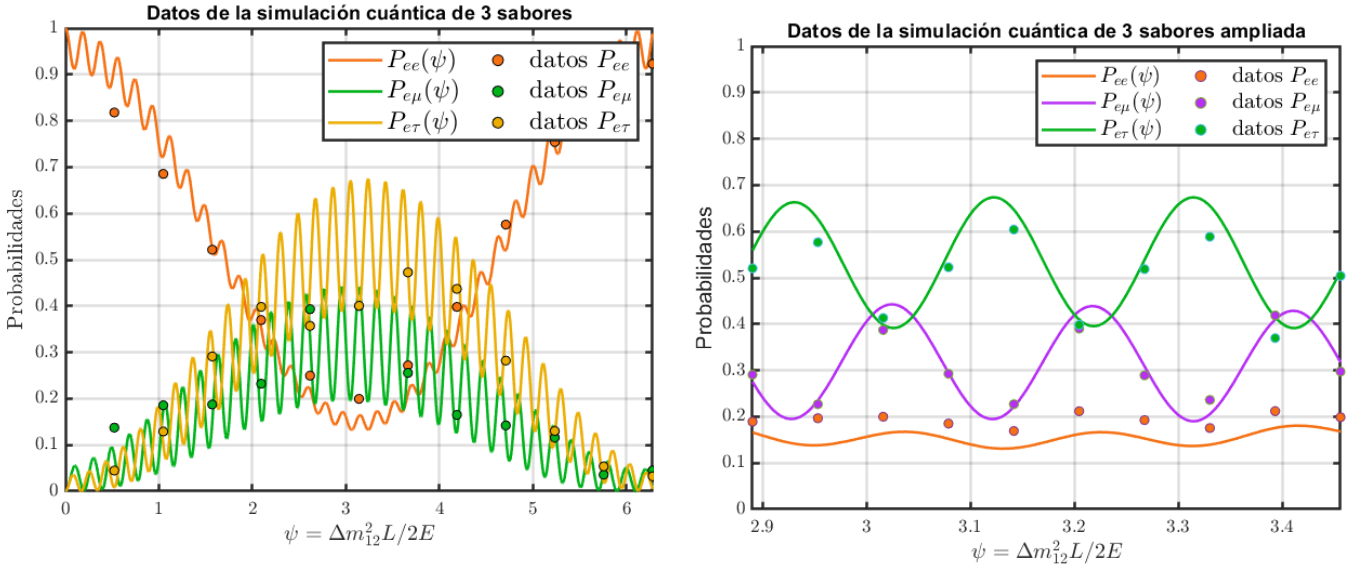


Figura 18: Datos de la simulación clásica comparada con la distribución teórica

En el simulador clásico (Figura 18) hacemos pasar este circuito en 100 puntos distintos para hallar todos los puntos necesarios para que se pueda identificar todas las oscilaciones de forma precisa. Igual que antes, el simulador hará 10^4 medidas de los qubits en cada punto.

En este circuito hemos empleado 10 puertas controladas y tres puertas de un qubit, lo cual nos hace esperar un error mucho más elevado y significativo a la hora de obtener datos del ordenador cuántico. Haremos dos series de medidas, una de 12 medidas entre $\psi = 0, 2\pi$ representadas en la Figura 19a igual que en el caso de dos sabores y otras 12 en un intervalo ampliado al centro en la Figura 19b.



(a) Representación de los datos de la simulación cuántica de dos sabores, comparados con la expresión teórica.

(b) Datos de la simulación cuántica de un intervalo central ampliado.

Figura 19

8. Conclusión

Los ordenadores cuánticos tienen un potencial inigualable en lo que se refiere a simulación de sistemas cuánticos. En este trabajo hemos usado este potencial para simular las oscilaciones de neutrinos de dos y tres sabores. Hemos repasado conceptos de mecánica cuántica que se pueden aplicar a la teoría de la información cuántica como el entrelazamiento y la entropía, y hemos mostrado como crear circuito cuántico simple.

En el caso de los neutrinos de dos sabores hemos obtenido unos resultados que se corresponden de forma bastante fiel a la teoría. Esto significa que hemos hecho que un sistema de dos qubits se comporte como un neutrino. También se ha hecho un análisis de la entropía de entrelazamiento de los neutrinos y hemos visto como la base computacional nos ayuda a la hora de hacer el cálculo.

En el caso de tres sabores los resultados no han sido tan buenos pero igualmente han demostrado que estos ordenadores son capaces de simular sistemas cuánticos

más sofisticados incluyendo las puertas lógicas apropiadas.

Futuras mejoras de los ordenadores cuánticos mejorarán la calidad de estas últimas medidas. Esto se podría producir tanto en forma de nuevo hardware como en la de nuevos algoritmos de corrección de error. Los NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum computers), por ejemplo, son ordenadores con entre 50 y 100 qubits cuyos algoritmos se están desarrollando a día de hoy. O los ordenadores híbridos capaces de realizar operaciones con bits y qubits al mismo tiempo.[23]

Quantum computers have an incredible potential regarding simulation of quantum systems. In this thesis we make use of this potential to simulate oscillations of two and three-flavour neutrinos. We have explained some concepts of quantum mechanics that can be applied to quantum information theory, such as entanglement and entropy, and we have shown how to create simple quantum circuits.

About the two-flavour neutrino we have obtained results that faithfully resemble the ones demonstrated in theory. That means that we have made a system of two qubits that behaves like a neutrino. We have also made an analysis of the entropy of entanglement of neutrinos and we have seen how the computational basis helps calculating it.

About the three-flavour neutrino the results have not been as great but also demonstrates how these computers can simulate more sophisticated quantum systems with the appropriate logic gates.

Future improvements in quantum computers will improve the quality of these measurements. This could be accomplished in the form new hardware or new error-correcting algorithms. For instance the NISQ(Noisy Intermediate-Scale Quantum computers), are computers with between 50 and 100 qubits which algorithms are being developed right now. Or hybrid computers, capable of running operations with bits and qubits at the same time.[23]

Referencias

[1] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information, 2002.

[2] José Wagner Furtado Valle and Jorge Romao. *Neutrinos in high energy and astroparticle physics*. John Wiley & Sons, 2015.

[3] Shashank Virmani Martin B. Plenio. An introduction to entanglement measures. *Quantum Information and Computation*, 7, Jan 2007.

[4] M. Blasone, F. Dell'Anno, S. De Siena, and F. Illuminati. Entanglement in neutrino oscillations. *Europhysics Letters*, 85, Mar 2009.

[5] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80, Mar 1998.

[6] Heinz-Peter Breuer and Francesco et. al Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.

[7] Susanne Mertens. Direct neutrino mass experiments. *Journal of Physics: Conference Series*, 718, 2016.

[8] F. Reines and C.L. Cowan. Detection of the free neutrino. *Physical Review*, 107, 1957.

[9] G. et al. Danby. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Physical Review Letters*, 9, Jul 1962.

[10] K. Kodama et al. Final tau-neutrino results from the donut experiment. *Physical Review D*, 78, Sep 2008.

[11] J. Chabas. An analytical approach to the solar neutrino fluxes. *Astronomy and Astrophysics*, 27, May 1973.

[12] Bruce T. Cleveland et al. Measurement of the solar electron neutrino flux with the homestake chlorine detector. *The Astrophysics Journal*, 496, 1998.

[13] Bruno Pontecorvo. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 53, Jun 1967.

[14] Abhishek Kumar Jha, Akshay Chatla, and Bindu A. Bambah. Quantum simulation of oscillating neutrinos. Oct 2020.

[15] J. Hosaka et al. Solar neutrino measurements in super-kamiokande-i. *Physical Review D*, 73, Jun 2006.

[16] Gaetana Anamiati. Phenomenology of quasi-dirac neutrinos and a study of high-dimensional neutrino masses. 2018.

[17] Ivan Esteban, M.C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Thomas Schwetz, and Albert Zhou. The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, 178, Sep 2020.

[18] SJ Van Enk. Single-particle entanglement. *Physical Review A*, 72(6):064306, 2005.

[19] Ashutosh Kumar Alok, Subhashish Banerjee, and S. Uma Sankar. Quantum correlations in terms of neutrino oscillation probabilities. *Nuclear Physics B*, 909, May 2016.

[20] Abhishek Kumar Jha, Supratik Mukherjee, and Bindu A. Bambah. Tri-partite entanglement in neutrino oscillations. *Modern Physics Letters A*, 39, 2021.

[21] Yong-Cheng Ou and Heng Fan. Monogamy inequality in terms of negativity for three-qubit states. *Physical Review A*, 75, Jun 2007.

[22] C.A. Argüelles and B.J.P. Jones. Neutrino oscillations in a quantum processor. *Physical Review Research*, 1, Dec 2019.

[23] Kishor Bharti et. al. Noisy intermediate-scale quantum (nisq) algorithms. *arXiv preprint arXiv:2101.08448*, 2021.